CONCOURS D'ENTREE 1993

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B.: Ce sujet comporte 3 pages de texte.
2 feuilles de papier millimétré sont nécessaires pour ce sujet.

On se propose d'étudier deux équations différentielles de la forme $y'^{n} = y + 3(y')^{p}$ où n et p sont des entiers naturels non nuls et où y est une fonction inconnue réelle de la variable réelle x, définie et dérivable sur un certain intervalle I (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$; on recherchera $x \longrightarrow y(x)$ sur I le plus grand possible.
Un repère orthonormé (R) d'origine O et d'axes x'Ox et y'Oy est donné.

A

On considère dans cette partie l'équation (E) $y'^{3} = y + 3(y')^{2}$.
On recherche y deux fois dérivable avec une dérivée seconde $x \longrightarrow y''(x)$ continue sur I.
On suppose de plus qu'il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide sur lequel la restriction de y est identiquement nulle.

1. On considère la courbe paramétrique d'équations

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = -6t + \frac{3}{2}t^2 \\ y = \psi(t) = -3t^2 + t^3 \end{cases} \quad \text{où le paramètre t décrit } \mathbb{R}$$

   a. Donner le tableau des variations des deux fonctions, $t \longrightarrow \varphi(t)$ et $t \longrightarrow \psi(t)$, avec leurs limites aux bornes.

   b. Représenter la courbe dans le repère (R) en prenant comme unité 1 cm. Préciser les tangentes aux points d'intersection avec les axes et aux autres points remarquables.

   c. Démontrer que la fonction φ induit une bijection φ_1 entre l'intervalle $]-\infty, 2]$ et l'intervalle $[-6, +\infty[$.
   Démontrer que la fonction φ induit une bijection φ_2 entre l'intervalle $[2, +\infty[$ et l'intervalle $[-6, +\infty[$.

d. On considère la fonction f_1 définie pour tout x, $x \geq -6$ par $f_1(x) = \psi(\varphi_1^{-1}(x))$ et la fonction f_2 définie pour tout x, $x \geq -6$ par $f_2(x) = \psi(\varphi_2^{-1}(x))$.
Démontrer que f_1 et f_2 donnent deux solutions de l'équation (E) définies sur l'intervalle ouvert $]-6, +\infty[$.
Sont-ce des solutions de (E) définies sur l'intervalle fermé $[-6, +\infty[$?

e. Expliciter les fonctions $x \longrightarrow f_1(x)$ et $x \longrightarrow f_2(x)$ à l'aide de radicaux.

2. On étudie, dans cette question, une autre solution éventuelle y de (E), qui est supposée définie en 0, $0 \in I$, et telle que $y'(0) = 0$.
Soit a, $a \neq 0$ I tel que $y'(a) = 0$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$ il existe x_k tel que $x_k \in I$, $0 < |x_k - a| < \frac{1}{k}$ et $y'(x_k)$ non nul. Calculer $y''(a)$ et en déduire le sens de variation de y' au voisinage de a.

b. Démontrer que pour tout x, $x \in I$ on a $3y'(x)y''(x) - 6y''(x) = 1$.

c. En déduire x en fonction de $y'(x)$. Vérifier que la fonction y n'est pas définie pour $x < -6$. Prouver que la fonction y' ne s'annule qu'en 0. Conclure.

B

On considère dans cette partie l'équation (E') $y'^3 = y + 3y'$ avec la condition $|y(1,5)| = 2$.

1. Soit la courbe paramétrique d'équations :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \frac{3}{2}t^2 - 3\ln|t| \\ y = \psi(t) = t^3 - 3t \end{cases} \quad \text{où t décrit } \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

a. Donner le tableau des variations des fonctions $t \longrightarrow \varphi(t)$ et $t \longrightarrow \psi(t)$ avec leurs limites aux bornes.

b. Représenter la courbe dans le repère (*R*) en prenant comme unité 2 cm. Préciser les tangentes aux points d'intersection avec les axes, ainsi qu'aux autres points remarquables.

c. Démontrer que la fonction φ induit une bijection φ_1 entre l'intervalle $]-\infty, -1]$ et l'intervalle $[1,5 , +\infty[$, ainsi qu'une bijection φ_2 entre l'intervalle $[-1, 0[$ et l'intervalle $[1,5 , +\infty[$.
Vérifier de même que ψ induit une bijection ψ_1 de $[-1, 0[$ sur $]0, 2]$.

d. Démontrer que l'on peut établir l'existence de deux fonctions y_1 et y_2 solutions de l'équation (E') sur l'intervalle $I = [1,5 , +\infty[$ et vérifiant : $y_1(1,5) = y_2(1,5) = 2$ avec $y_1(x)$ qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et $y_2(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

e. Déterminer deux autres solutions y_3 et y_4 de (E') définies sur l'intervalle $[1,5 , +\infty[$ et vérifiant $y_3(1,5) = y_4(1,5) = -2$ avec $y_3(x)$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

(On ne cherchera pas à expliciter ces quatre fonctions).

2. Calculer, si elle converge, l'intégrale :

$$\int_{1,5}^{+\infty} y_2(x)dx$$

3. a. Vérifier que si $x > 1,5$, on a $-1 < y_2'(x) < 0$.

b. Vérifier que y_2 est deux fois dérivable sur $]1,5 , +\infty[$; calculer y_2'' en fonction de y_2'. Calculer le signe de y_2'' et la limite de $y_2''(x)$ quand x tend vers 1,5 avec $x > 1,5$.

c. Déduire par récurrence que y_2 est indéfiniment dérivable sur $]1,5, +\infty[$.